

# OAS 모형을 통한 MBS 가격평가

2016. 11. 9



- 
- 작성자 : 안세룡 연구위원 (051-663-8175 / [sahn@hf.go.kr](mailto:sahn@hf.go.kr))
  - 본 조사연구는 한국주택금융공사와 포항공과대학교의 협약을 통해 안세룡 연구위원(한국주택금융공사), 장봉규 교수(포항공과대학교 금융 및 위험관리 연구 센터장), 태현욱, 서웅기(이상 포항공과대학교 통합과정)가 공동으로 수행 중인 ‘한국형 자동이체식 주택저당증권 가치 평가 모형’ 논문을 요약한 보고서입니다.
  - 본고의 내용은 필자의 개인 의견으로 한국주택금융공사의 공식적인 견해와 다를 수 있습니다.
-

# 목 차

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| <b>① 개요</b>                          | <b>1</b>  |
| 1. 연구의 배경 및 목적                       | 1         |
| 2. 선행연구                              | 2         |
| <b>② Pass-Through MBS 가격 평가 기초모형</b> | <b>5</b>  |
| 1. Pass-Through MBS와 CMO 방식 MBS의 비교  | 5         |
| 2. PSK 모형과 MBS 스프레드                  | 7         |
| 3. 기초모형 설정                           | 10        |
| 4. 기초모형 계산 결과 및 분석                   | 12        |
| <b>③ Pass-Through MBS 가격 평가 확장모형</b> | <b>19</b> |
| 1. 금리모형                              | 19        |
| 2. 조기상환모형                            | 21        |
| 3. prOAS 모형                          | 23        |
| 4. 확장모형 수치 계산 가능성 및 전망               | 25        |
| <b>④ 결론 및 시사점</b>                    | <b>29</b> |
| 1. 분석결과 종합 및 시사점                     | 29        |
| 2. 향후 연구과제                           | 30        |
| 참 고 문 헌                              | 31        |
| 부 록                                  | 34        |

## < 요약 >

- 최근 공사는 국내 시장에서 현재 공사의 CMO 방식 MBS와는 다른 구조의 Pass-Through MBS의 발행 가능성을 검토하고 있음
- Pass-Through MBS의 경우 OAS 방식을 이용한 가격 평가가 가능하며, 이 방법론을 이용하여 공사 Pass-Through MBS의 가격평가 가능성을 검토하고자 함
- 먼저 현재 Pass-Through MBS의 거래 데이터가 없는 상황에서 바로 적용 가능한 기초모형을 제시함
- 기초모형은 조기상환율로 PSK, 상수 OAS를 적용한 모형으로, 이 기초모형을 통해 MBS 가격 결정에 대한 이해도를 높이고 시장에 벤치마크 가격을 제시하고자 함
- 또한 보다 엄밀한 형태의 확장모형을 준비하여 향후 데이터가 축적되면 더 정확하고 유용성 있는 MBS 가격평가가 가능하도록 예비함
- 확장모형은 평균회귀 이자율 과정, 대환요인과 회전요인을 구분한 조기상환율 과정, 그리고 조기상환위험 스프레드를 분리한 prOAS 등을 이용함

## 1. 연구의 배경 및 목적

- ☐ 최근 공사는 국내 시장에서 Pass-Through MBS의 발행 가능성을 검토하고 있음
  - Pass-Through MBS는 현재 공사의 CMO(Collateralized Mortgage Obligations) 구조와는 달리 주택담보대출에서 발생하는 현금흐름을 그대로 투자자에게 전달하는 형태의 상품
- ☐ Pass-Through MBS의 경우 미국과 같이 OAS(Option-Adjusted Spread) 방식을 이용한 가격 평가가 가능
  - 반면 현 공사의 CMO 방식 MBS의 경우, 콜 행사에 대한 공사의 최적 의사결정 단계가 포함되어 OAS를 이용한 가격 평가가 용이하지 않음
- ☐ 이 연구는 공사가 Pass-Through MBS를 발행할 경우, 널리 알려진 OAS를 이용한 평가 방식의 적용 가능성을 검토하는 조사연구임
  - OAS접근법을 이용한 가격평가 기초모형을 수립하여 MBS 가격의 벤치마크를 시장에 제공하고자 함
  - 또한 MBS 거래 및 입찰에 있어 스프레드에 대한 유의미한 정보를 전달하고자 함
  - 이를 통해 Pass-Through MBS의 시장 이해도 제고, 유통 활성화 및 스프레드 감소를 기대함

## 2. 선행연구

- Fabozzi(2016)에 따르면 Pass-Through MBS의 가격결정은 주로 OAS를 적용한 방법론이 적용되고 있음
  - OAS는 MBS에 내재된 리스크, 즉 조기상환위험, 신용위험, 유동성 위험 등이 반영된, 무위험 수익률에 추가되는 스프레드
  - 다만 OAS를 MBS의 시장가격으로부터 역으로 계산하는 방식이 주로 이용되고 있는데(Fabozzi, 2016), 이렇게 찾은 OAS는 거래당사자가 현재 거래 혹은 발행하고자 하는 MBS의 OAS에 대한 벤치마크가 됨
- MBS가 다른 금융상품과 대비되는 가장 큰 특징은 차입자의 조기상환 옵션으로, 이 조기상환 행태를 모형화하는 것이 MBS 평가의 핵심이라고 할 수 있음
  - 차입자의 조기상환 인센티브는 주로 금리 요인과 부도 요인, 소비평활화 요인으로 대표되는 경제적 요인, 그리고 이사 등 외적요건에 따른 비경제적 요인으로 구분됨(한영하, 2013)
- 조기상환율 모형의 경우 크게 이론적 모형과 통계적 모형으로 구분할 수 있음
  - 이론적 모형은 구조적 접근법(Structural Approach)으로도 불리며, 채무자의 조기상환을 채무자의 콜 옵션으로 구조화하여 모형함
    - 다만 이를 이용한 실증적 결과는 실제 조기상환율의 크기와 조기상환 시기 등에 대해 예측력이 크게 떨어져 실증적인 추정을 목적으로 하기에는 한계가 있음(한영하, 2013, 안세룡·노태민, 2016)
    - 대표적인 이론적 접근법 문헌으로는 Dunn and McConnell(1981 a, b), Kau, Keenan, Muller and Epperson(1992), Kau(1995), Stanton(1995)를 들 수 있음

- 통계적 모형은 분석단위, 분석기법, 설명변수 정밀도 등의 차이에 따라 1세대, 2세대, 3세대 모형으로 구분할 수 있음(안세룡·노태민, 2016)
  - 1세대 조기상환모형은 주택담보대출 풀을 기본분석 단위로 하여 금리 효과, 소진효과, 계절성 등을 설명변수로 한 비교적 간단한 모형
  - 2세대 모형은 Richard and Roll(1989)과 같이 금리요인을 시장금리와 계약금리의 비율로 나타내고 성숙화요인을 반영하는 등 추정기법의 정교성을 높인 모형
  - 3세대 모형은 개별 주택담보대출 데이터를 이용하여 개별 가구의 특징인 LTV, 담보주택 가격, 가구 구성 등을 변수로 하여 보다 정교한 통계적 기법을 적용한 모형(Deng et al.(2000) 등)
- 또한 이론적 모형과 통계적 모형의 결합 형태로 볼 수 있는 축약형 조기상환모형도 등장함(Schwartz and Torous, 1989, Kau et al., 2004, Kolbe and Zagst, 2008 등)
  - 축약형 모형을 통해 이론적 모형이 제시한 조기상환율 모형에 적합한 프로세스를 가정하고, 이 조기상환율이 거시경제적 변수에 영향을 받는 형태로 모형할 수 있음(안세룡·노태민, 2016)

□ 다만 이러한 통계적 조기상환율 모형에서 제시한 조기상환율을 직접적으로 MBS 가격 평가에 적용할 수는 없음(Carlin, Longstaff, and Matoba, 2014)

- MBS 가격 평가에 이용되는 금리 프로세스는 위험중립측도 하의 모형으로 적용되는 데 반해 통계적 조기상환율 모형에서 제시한 조기상환 프로세스는 실제 측도에서 모형되었기 때문
  - 이 경우 조기상환모형이 조기상환리스크에 대한 프리미엄을 반영하지 못하는 문제가 있음

- 최근 Levin and Davidson은 OAS를 이용한 MBS 가격 평가에서 조기상환위험과 신용위험에 대한 스프레드를 구분하려고 시도함
  - Levin and Davidson(2005)에서는 기존에 알려진 OAS 접근법의 스프레드에서 조기상환에 대한 스프레드를 분리해내고자 시도함
  - Levin and Davidson(2008)에서는 Levin and Davidson(2005)를 확장하여 신용위험에 대한 스프레드까지 분리하고자 시도함
- Chernov et al.(2016)의 연구는 MBS의 시장가격에서 내재 조기상환 함수를 찾고, 이를 축약형 MBS 가격 결정 모형에 적용한 연구임
  - 이들은 특별히 조기상환율을 대환요인과 회전요인으로 구분하였고, 이 두 요인이 거시경제의 시스템 리스크와 연결되어 있음을 보임
  - 또한 이들 모형에서 찾은 내재 조기상환율은 실제 조기상환율보다 매우 높게 나타나 MBS 가격에 녹아 있는 조기상환프리미엄이 상당한 수준이라는 것을 증명함

## 1. Pass-Through MBS와 CMO 방식 MBS의 비교

- MBS의 발행구조는 주로 유동화자산의 현금흐름 변동위험을 MBS 발행 참여자에게 어떠한 방식으로 배분하는가에 따라 구분됨
  - MBS 발행 참여자는 크게 발행자, 투자자, 지급보증자로 볼 수 있음
  - 다만 어떤 발행구조를 선택하더라도 리스크의 총량은 불변
- Pass-Through MBS는 기초자산인 주택담보대출 풀에서 발생하는 현금흐름을 중개기관을 거쳐 투자자에게 바로 지급하는 상품
  - 대부분 단일 트렌치로 발행되어 기초자산의 현금흐름에 따라 정해진 주기에 원리금을 상환
  - 주택담보대출로부터 유입되는 현금흐름을 자산관리 수수료 등을 포함한 유동화 비용을 제외하고 투자비율에 따라 투자자에게 배분
  - 따라서 주택담보대출 차입자의 조기상환이나 연체 등의 현금흐름 불확실성의 위험은 고스란히 MBS 투자자가 가짐
- CMO방식 MBS는 주로 복수 트렌치로 발행되어 원금이 만기 순서에 따라 이루어지거나 혹은 사전에 약정한 기타 순서에 따라 상환되기도 하는 등 다양한 형태 존재
  - 이러한 CMO 형태의 경우 중개기관이 조기상환과 연체 등의 현금흐름 불확실성의 위험을 안게 됨
    - 투자자는 사전에 약정한 일자에 약정한 비율의 현금을 받을 수 있음

- 다만 공사의 경우 조기상환위험을 해소하기 위해 일부 장기 트렌치에 대해 일정 조건 하에서 콜 옵션을 행사할 수 있음
  - 이는 마치 Pass-Through MBS에서 조기상환위험을 투자자에게 전이한 형태와 유사

□ 따라서 현재 공사의 CMO방식 MBS는 공사의 최적 의사결정이 포함되어 동일한 법정만기와 쿠폰을 가진 Pass-Through MBS에 비해 가치 평가에 어려움이 있음

- Pass-Through MBS의 경우 공사의 최적 의사결정 과정이 사라지기 때문에, 투자자들이 주택담보대출 차입자의 조기상환 의사결정에 대해 어느 정도 예측할 수 있으면 초과수익을 기대할 수 있음
- 동시에 미국과 같이 Pass-Through MBS 발행 이후 데이터가 축적되고 시장의 경험이 쌓이면 MBS의 국채 대비 스프레드가 점진적으로 하락할 것으로 기대함

## 2. PSK 모형과 MBS 스프레드

### 가. PSK 모형

□ MBS 가격 평가를 위한 조기상환모형은 현실에 가까울수록 우월한 모형이라고 볼 수 있으나, 국내 MBS 시장의 특성 상 보다 정교한 모형을 사용하는 데에는 다음과 같은 한계가 있음

- 금리모형과 연계된 조기상환모형을 위해선 과거 MBS 거래 데이터로부터 조기상환위험 프리미엄을 추정해야 하나, 아직 MBS 거래량이 부족하여 충분한 데이터가 확보되지 않음
- 조기상환율을 대환요인과 회전요인으로 구분하려면 금리의 상승과 하락이 반복되어야 하나, 공사가 MBS를 발행하기 시작한 2004년 중반부터 현재까지 국내 주택담보대출 금리는 전반적 하락세를 보임
- 따라서 MBS 가격 평가 기초모형을 위해선 직관적인 이해도를 높이기 위해 공사가 제시하고 있는 PSK(Prepayment Standard Korea) 조기상환 모형을 이용하고자 함

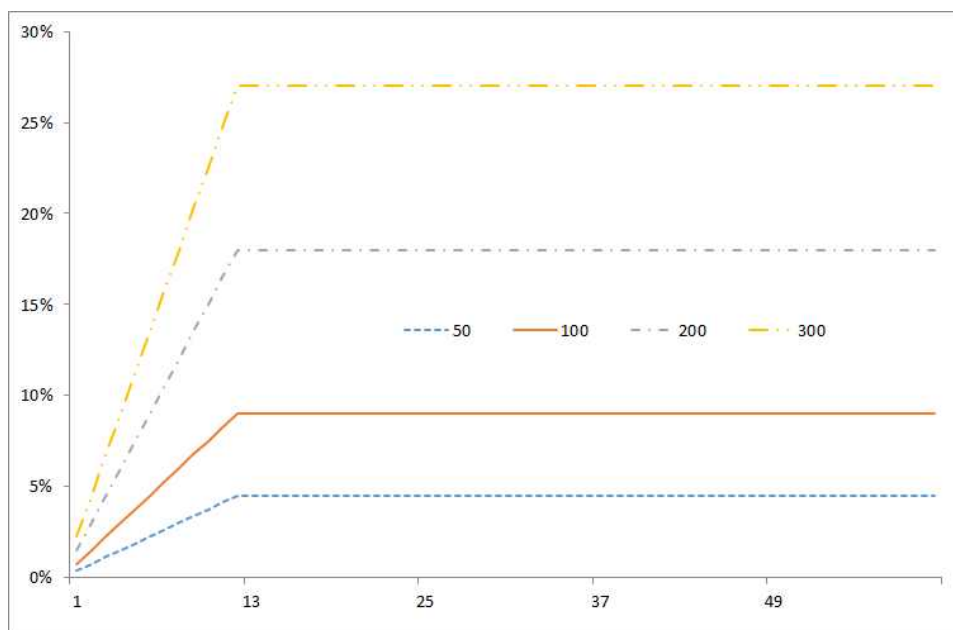
□ PSK 모형은 실제 조기상환 데이터를 이용한 간결한 단순경사로함수 형태의 조기상환율 모형임(김계홍, 2013)

- 이러한 단순경사로함수 형태는 미국의 PSA(Public Securities Association Standard Prepayment Model)와 일본의 PSJ(Prepayment Standard Japan)와 유사함
- 다음 식(1)은 PSK 100의 수식임

$$CPR(\tau) = \begin{cases} 9\% \times \frac{\tau}{12}, & \tau < 12 \\ 9\%, & \tau \geq 12 \end{cases} \quad \text{식(1)}$$

- 여기서  $\tau$ 은 경과개월수,  $CPR(\tau)$ 은 Conditional Prepayment Rate으로  $\tau$  경과개월에서의 연환산 조기상환율
  - 월별 조기상환율 (Single Monthly Mortality, SMM)은 다음 식(2)와 같이 구할 수 있음
- $$1 - CPR = (1 - SMM)^{12} \quad \text{식(2)}$$
- PSK는 성숙시점의 조기상환율 수준으로 배율을 결정하는데, 성숙시점의 조기상환율이 18%라면 PSK 200, 4.5%라면 PSK 50 등과 같은 배율로 고시됨

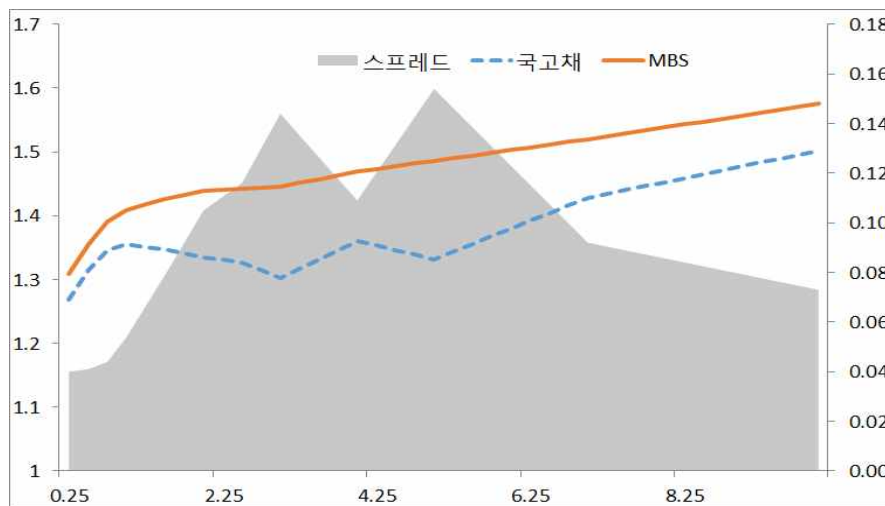
[그림1] PSK 예시



## 나. MBS 스프레드

- 공사 MBS의 법정만기 기준 국고채 수익률 대비 스프레드는 매우 낮은 상황임

[그림2] 국고채와 MBS 수익률의 이자율 기간구조



※ 자료 : 금융투자협회 채권정보센터 (2016.09.23. 기준)

- 그러나 MBS의 경우 법정만기와 실질만기에 매우 큰 차이가 있어 법정만기만으로 수익률을 비교하는 것은 무리가 있음
- 따라서 다음 [표1]과 같이 공사 MBS의 트렌치별 평균만기 기준으로 스프레드를 구하는 것이 합리적

[표1] 국고채와 MBS 수익률의 스프레드 예시

| 법정 만기 | 평균 만기  | MBS 수익률 | 평균만기 기준 국고채 수익률 | 스프레드   |
|-------|--------|---------|-----------------|--------|
| 5년    | 4.28년  | 1.843%  | 1.352%          | 49.1bp |
| 7년    | 5.91년  | 1.863%  | 1.376%          | 48.7bp |
| 10년   | 8.14년  | 1.814%  | 1.456%          | 35.8bp |
| 15년   | 11.1년  | 1.844%  | 1.504%          | 34.0bp |
| 20년   | 14.55년 | 1.834%  | 1.512%          | 32.2bp |

- 여기서 MBS의 평균만기와 수익률은 MBS 2016-20의 발행정보에서 가져옴

### 3. 기초모형 설정

- 공사 Pass-Through MBS의 기초모형은 현재 Pass-Through MBS의 거래 데이터가 없는 상황에서 사용 가능한 모형을 적용하기로 함
  - 조기상환율에 PSK 모형을 적용하여 MBS 발행 당시 기결정적 (Deterministic)인 형태로 모형
  - OAS는 금리수준과 만기에 관계없이 상수로 적용
  - 따라서 확률적 금리모형을 적용할 필요 없이 MBS 발행 당시의 시장 할인율 곡선을 산출하여 적용

- 기초모형에 가정한 주택담보대출 모형은 다음과 같음

- 주택담보대출은 모두 고정금리 원리금균등상환방식으로, 초기 원금이 1일 경우 연속적으로 상환하는 비율  $c$ 는 다음 식(3)과 같이 결정됨

$$c = \frac{m}{1 - e^{-mT}} \quad \text{식(3)}$$

- 여기서  $m$ 은 주택담보대출의 연속복리 이자율
- $T$ 는 대출만기

- 따라서  $t$ 시점의 주택담보대출 원금잔액  $I_t$ 는 다음 식(4)와 같이 계산됨

$$I_t = \frac{1 - e^{-m(T-t)}}{1 - e^{-mT}} \quad \text{식(4)}$$

- 기초모형의 MBS 관련 모형은 다음과 같음

- MBS 또한 주택담보대출과 동일한 만기를 가짐

- MBS의  $t$ 시점 원금잔액  $N_t$ 는 다음 식(5)와 같이 주어짐

$$N_t = \exp\left\{-\int_0^t p_s ds\right\} \quad \text{식(5)}$$

- 여기서  $p_t$ 는  $t$ 시점에서의 순간 조기상환율로, 기초모형에서는 PSK를 따르는 것으로 가정

- 따라서  $t$ 시점에 MBS 투자자가 수취하는 원리금 현금흐름  $C_t$ 는 다음 식(6)과 같이 나타남

$$C_t = N_t(c + I_t p_t)(1 - \eta) \quad \text{식(6)}$$

- 여기서  $\eta$ 는 유동화비용 비율

□ 이를 종합하면, MBS의 가격  $V(m, T)$ 는 다음 식(7)과 같이 계산됨

$$V(m, T) = E\left[\int_0^T \exp\{-(r_t + OAS)t\} C_t dt\right] \quad \text{식(7)}$$

- 여기서  $r_t$ 는  $t$ 시점의 순간 무위험 할인율임
- 식(7)은 다시 다음 식(8)과 같이 고쳐쓸 수 있음

$$\begin{aligned} V(m, T) &= \int_0^T P(0, t) \exp\{-OAS \cdot t\} C_t dt \\ &\approx \sum_{n=1}^{4 \times T} P(0, t_n) \exp\{-OAS \cdot t_n\} C_{t_n} / 4 \end{aligned} \quad \text{식(8)}$$

- 여기서  $P(0, t)$ 는  $t$ 시점에 1을 주는 무이표채 가격
- $t_n = n/4$ 로 분기마다 현금흐름이 발생함을 의미
- 기초모형은 식(8)을 이용하여 계산

## 4. 기초모형 계산 결과 및 분석

### 가. 모수 설정

□ 기초모형에 적용할 모수는 다음 [표2]와 같이 설정함

[표2] 기초모형 모수 설정

| 모수               | 모수값        | 비고                                 |
|------------------|------------|------------------------------------|
| 금리( $r_t$ )      | —          | 2016.9.23.종가 기준                    |
| 주택담보대출 금리( $m$ ) | 2.6%       | 2016.9월 기준<br>아낌e보금자리론 20년 만기 대출금리 |
| 만기( $T$ )        | 20년        |                                    |
| 유동화비용( $\eta$ )  | 0.005~0.03 |                                    |
| PSK 배율           | 50~300     |                                    |
| OAS              | 0~50bp     |                                    |

- 2016.9.23일 기준의 국고채권 수익률과 이를 이용하여 산출한 현물 수익률은 다음 [표3]과 같이 나타남

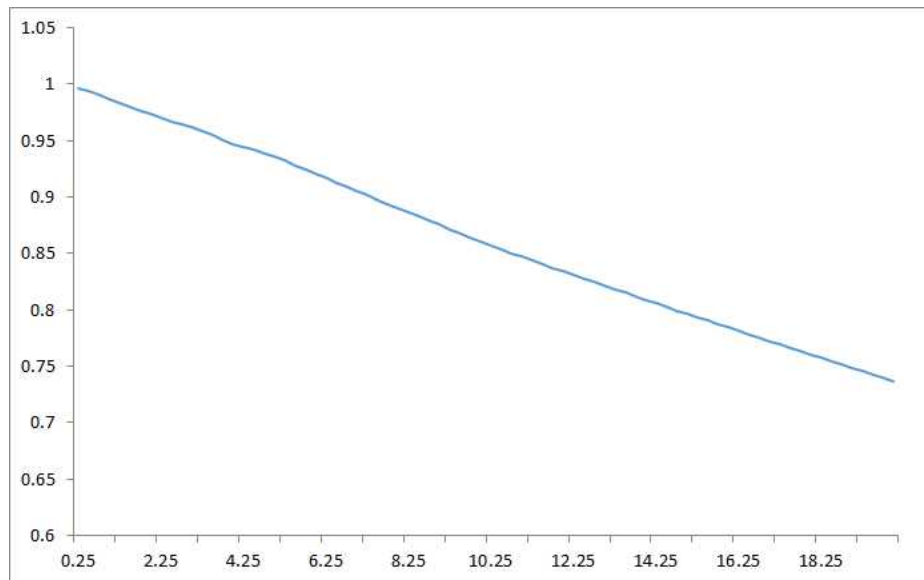
[표3] 국고채권 수익률과 현물수익률

| 만기      | 0.25  | 0.5   | 0.75  | 1     | 1.5   | 2     | 2.5   |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 국고채 수익률 | 1.268 | 1.315 | 1.346 | 1.355 | 1.347 | 1.334 | 1.327 |
| 현물수익률   | 1.270 | 1.310 | 1.340 | 1.350 | 1.340 | 1.330 | 1.330 |
| 만기      | 3     | 4     | 5     | 7     | 10    | 20    | 30    |
| 국고채 수익률 | 1.302 | 1.36  | 1.332 | 1.428 | 1.502 | 1.523 | 1.539 |
| 현물수익률   | 1.300 | 1.360 | 1.330 | 1.430 | 1.510 | 1.530 | 1.540 |

※ 자료 : 금융투자협회 채권정보센터

- 또한 [표3]의 결과를 바탕으로 산출한 만기별 무위험 무이표채 가격은 다음 [그림4]와 같이 나타남

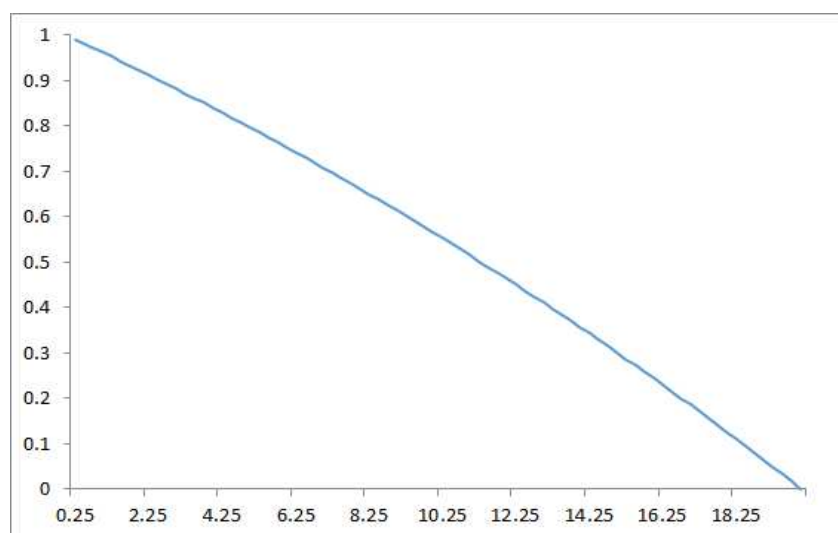
[그림4] 무위험 무이표채 가격



## 나. 기초모형 계산 결과 및 분석

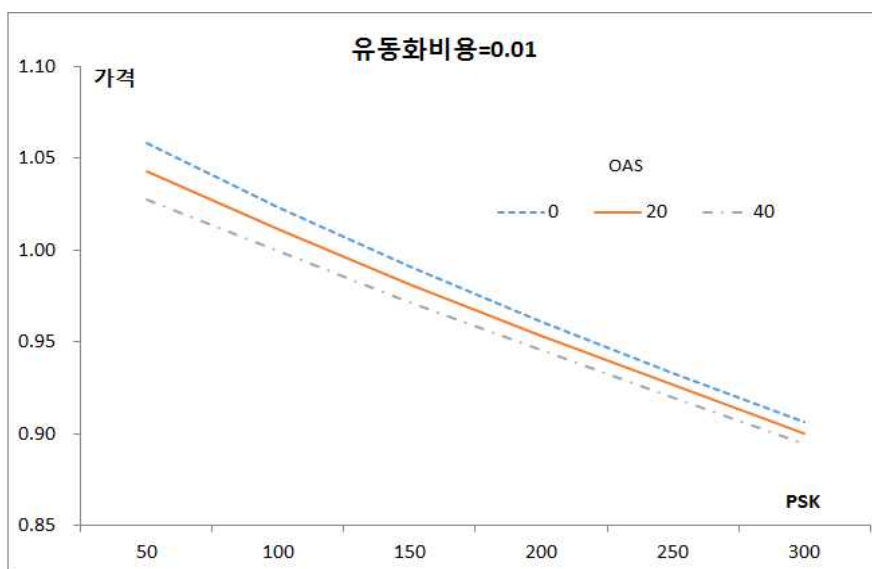
- [표2]에 있는 모수값을 바탕으로 계산하면, 주택담보대출 상환비율  $c$ 는 0.06412162으로 나타나며,  $t$ 시점의 주택담보대출 원금잔액  $I_t$ 는 다음 [그림5]와 같이 나타남

[그림5] 주택담보대출 원금잔액  $I_t$

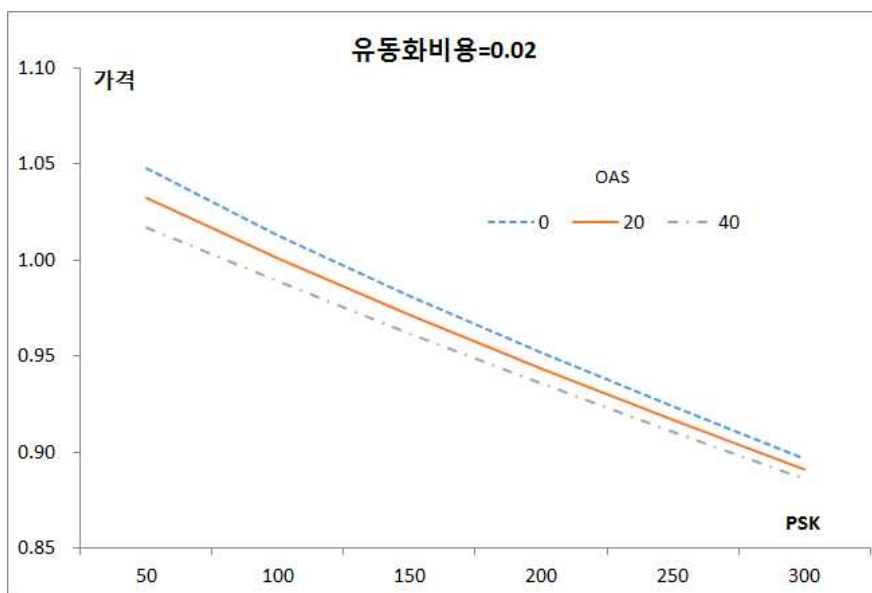


□ [표2]에 있는 모수값을 바탕으로 계산한 공사 MBS의 가격을 유동화비용 비율 별로 나타내면 다음 [그림6]-[그림8]과 같음

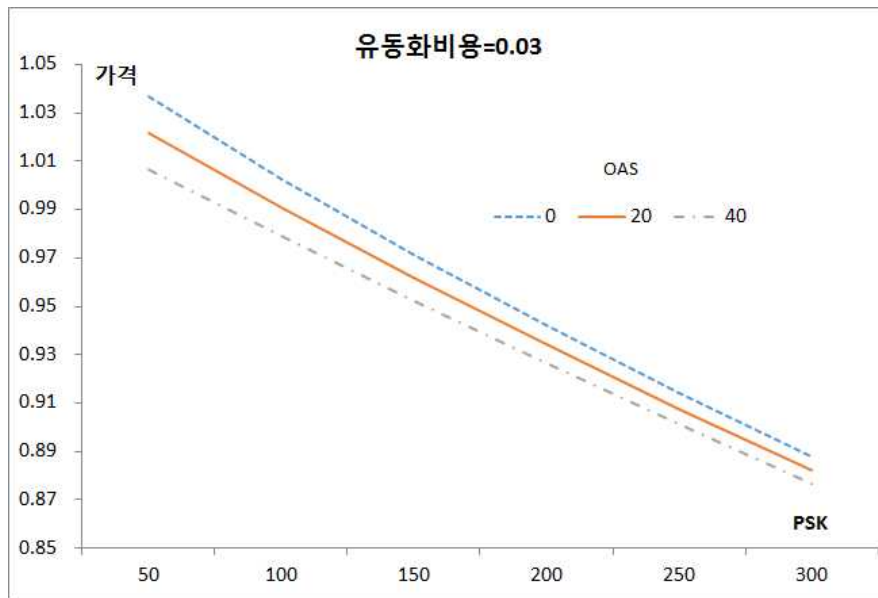
[그림6] 기초모형 가격 계산 결과01



[그림7] 기초모형 가격 계산 결과02



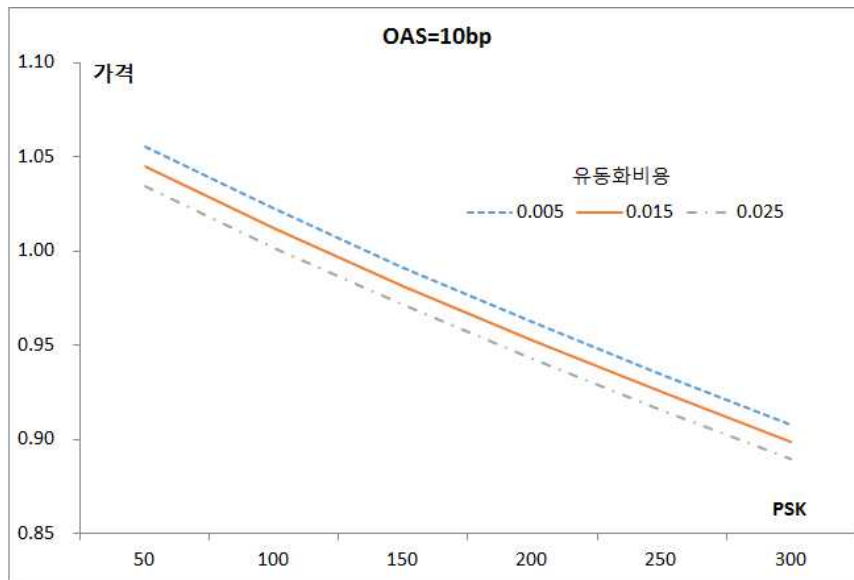
[그림8] 기초모형 가격 계산 결과03



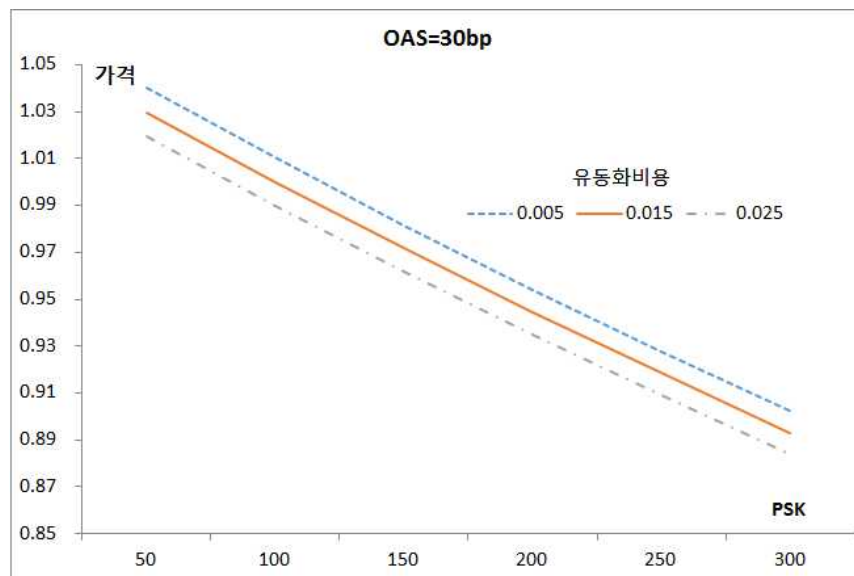
- [그림6] - [그림8]의 결과에서 가격이 1.0으로 나타난 점이 주어진 유동화비용 비율, OAS, 그리고 PSK에서의 par 가격임
  - 예를 들어, [그림6]에서는 유동화비용 비율이 0.01에서 OAS가 40bp일 경우 약 100 PSK에서 MBS 가격이 par인 것을 확인할 수 있음
- [그림6] - [그림8]의 결과에서 알 수 있듯이, 유동화비용과 OAS, 그리고 PSK 배율이 상승할수록 MBS 가격은 낮아짐
  - 이는 매우 직관적인 결과

- 또한 MBS의 가격을 OAS 별로 나타내면 다음 [그림9]-[그림11]과 같음

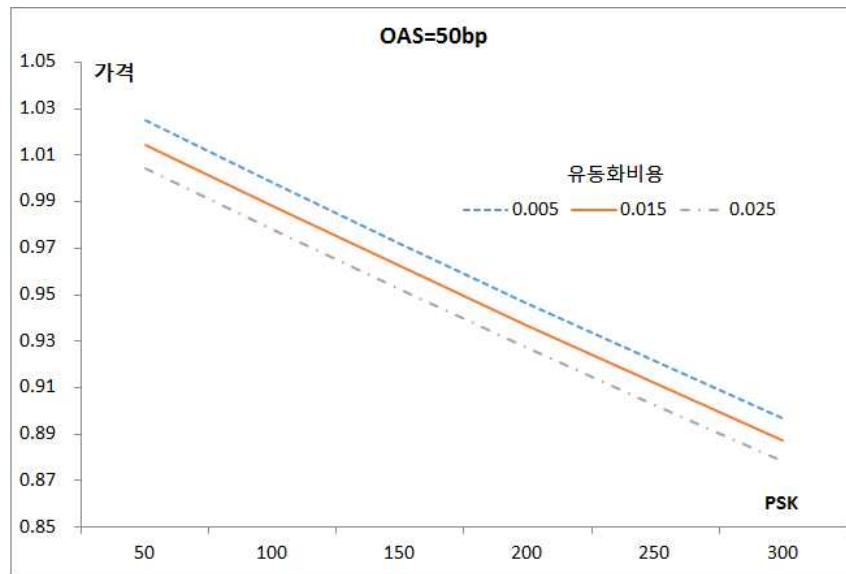
[그림9] 기초모형 가격 계산 결과04



[그림10] 기초모형 가격 계산 결과05



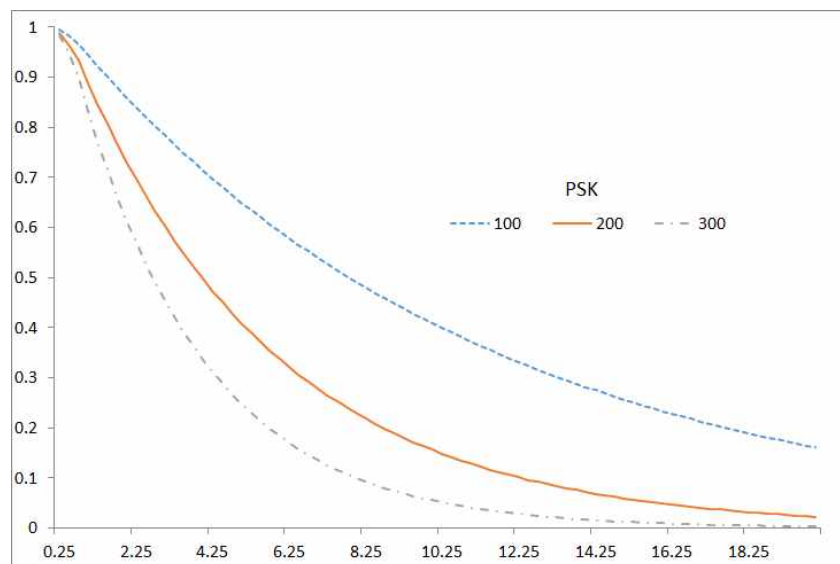
[그림11] 기초모형 가격 계산 결과06



□ 기타 MBS 관련 계산 결과는 다음과 같음

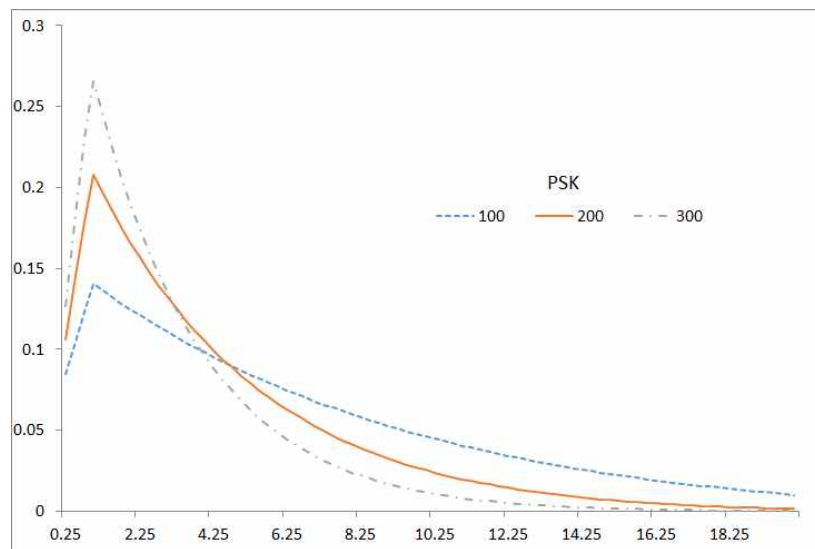
- MBS의  $t$ 시점 원금잔액  $N_t$ 는 다음 [그림12]와 같이 나타남

[그림12] MBS의 원금잔액  $N_t$



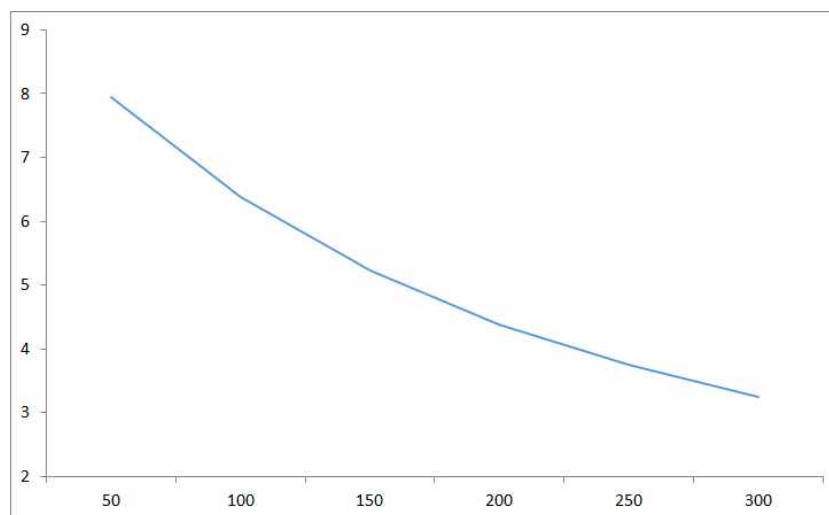
- MBS 투자자가 받게 될  $t$ 시점의 현금흐름  $C_t$ 는 다음 [그림13]과 같이 나타남
- 여기서 유동화비용 비율  $\eta=0.015$ , OAS=30bp로 가정

[그림14] MBS의 현금흐름  $C_t$



- 또한 PSK 배율에 따른 MBS의 현금흐름 가중평균 만기는 [그림15]와 같이 나타남
- 역시 유동화비용 비율  $\eta=0.015$ , OAS=30bp로 가정

[그림14] MBS의 현금흐름 가중평균 만기



- 이 장에서는 공사의 Pass-Through MBS의 가격을 보다 엄밀하게 평가할 수 있는 확장 모형에 대해 논하기로 함
  - 이 확장모형은 기본적으로 Pass-Through MBS의 시장 거래 데이터를 필요로 함
  - 금리의 경우 시장 데이터가 충분하나, 조기상환 프리미엄을 적용하기 위한 MBS 거래 데이터는 부족함
- 따라서 이 장에서 제시하는 확장 모형은 추후 공사 Pass-Through MBS의 거래 데이터가 축적된 경우에 적용 가능하나, 그에 앞서 사전적인 연구 역시 필요하다고 볼 수 있음

## 1. 금리모형

- MBS 가운데 장기물 트렌치는 장기간의 현금흐름을 가지기 때문에 금리변동을 감안한 가격 계산이 필수적임
  - 금리모형에 필요한 모수의 경우 채권시장과 같은 금리 상품이 거래 되는 시장에서 시장 할인율을 추출해 낼 수 있음
- 다양한 금리모형이 있으나, 본 연구에서는 간단히 확장 Vasicek 모형을 이용함
  - 확장 Vasicek 모형에서는 순간 이자율 프로세스  $r_t$ 가 다음 식(8)과 같은 확률미분방정식을 따른다고 가정함

$$dr_t = (\theta_t - a_r r_t)dt + \sigma_r dW_t \quad \text{식(8)}$$

- 여기서  $a_r$ 은 평균이자율로 회귀하는 경향,  $\sigma_r$ 은 변동성을 나타냄

- $W_t$ 는 위험중립측도 하에서 브라운운동임
- 또한  $\theta_t$ 는  $t$ 시점의 장기 금리평균으로 다음 식(9)와 같이 계산됨

$$\theta_t = \frac{\partial f^M(0, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} + a_r f^M(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r t}) \quad \text{식(9)}$$

- $f^M(0, t)$ 는 순간 선도이자율로, [표3]과 [그림4]에 나타난 바와 같이 시장에서 관찰한 무이표채의 가격에서 다음 식(10)과 같이 계산할 수 있음

$$f^M(0, t) = - \frac{\partial \ln P^M(0, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} \quad \text{식(10)}$$

□ 계산의 편의를 위해 다음과 같이 새로운  $z_t$  프로세스를 정의하여 이용하기로 함

- $z_t$ 는 다음 식(11)과 같은 확률미분방정식을 따른다고 정의함

$$dz_t = -a_r z_t dt + \sigma_r dW_t, \quad z_0 = 0 \quad \text{식(11)}$$

- 우리는 약간의 계산을 통해 다음 식(12)를 유도할 수 있음

- 유도과정은 부록 참조

$$z_t = z_s e^{-a_r(t-s)} - M^T(s, t) + \sigma_r \int_s^t e^{-a_r(t-u)} dW_u^T \quad \text{식(12)}$$

## 2. 조기상환모형

- PSK 조기상환모형은 편리한 모형이지만 주택담보대출 차입자의 조기상환 행태를 매우 단순화시켜 실제 데이터와 거리가 있음
  - PSK 모형은 차입자의 의사결정을 반영한 구조적 모형과 다양한 변수의 영향을 포함한 통계적 모형 모두에 비해 단순화된 모형
- 이 연구의 확장모형에서는 Chernov et al. (2016)의 접근법에 따라 대환요인과 회전요인을 구분하여 조기상환율을 모형하기로 함
  - 대환요인은 시장금리가 하락하면서 기존 주택담보대출 차입자들이 더 낮은 금리의 대출로 옮기면서 발생하는 조기상환요인
  - 회전요인은 금리 외에 은퇴, 이사과 같은 기타 외생적인 이유로 차입자들이 조기상환하는 요인
- 본 연구에서는 다음 식(13)과 같이 대환요인과 회전요인을 구분한 내재 조기상환함수를 제시함

$$p_t = x_t + y_t \max(0, m - a - bz_t) \quad \text{식(13)}$$

- 여기서  $p_t$ 는 조기상환율,  $x_t$ 는 조기상환율 가운데 회전요인으로 설명되는 부분임
- 또한 대환요인은 주택담보대출 금리와 대출 차입자가 느끼는 내재적 금리( $a + bz_t$ )의 차이에 따라 결정되게 모형함
  - $y_t$ 는 대환요인에 대한 민감도를 나타냄
  - Chernov et al. (2016)에서는 식(13)에  $z_t$ 대신  $r_t$  사용

- 식(13)에 나타난  $x_t$ 와  $y_t$ 를 다음 식(14)-식(15)와 같이 평균회귀 프로세스로 가정함

$$dx_t = (\alpha_x - \beta_x x_t)dt + \sigma_x \sqrt{x} dW_x^{P^{pr}}, \quad \text{식(14)}$$

$$dy_t = (\alpha_y - \beta_y y_t)dt + \sigma_y \sqrt{y} dW_y^{P^{pr}} \quad \text{식(15)}$$

- 여기서  $W_x^{P^{pr}}$ 와  $W_y^{P^{pr}}$ 는 조기상환위험에 대한 현실측도  $P^{pr}$  하에서의 브라운운동으로, 금리모형의 브라운운동  $W_t$ 와 독립으로 가정

### 3. prOAS 모형

□ 본 연구에서는 Levin and Davidson (2005)이 제시한 prOAS (Prepayment risk and Option-Adjusted Spread) 모형을 도입하기로 함

- prOAS 모형은 기존 OAS에서 조기상환위험 프리미엄을 분리해낸 모형으로, 조기상환위험이 없는 OAS라고 볼 수 있음
- 따라서 prOAS 모형을 이용할 경우, 조기상환과 관계없이 모든 MBS에 일관된 스프레드를 적용할 수 있는 장점이 있음

□ prOAS 모형의 MBS 기대수익률  $R_t$ 은 다음 식(16)과 같이 무위험 수익률과 조기상환위험 프리미엄, 그리고 prOAS의 합으로 계산됨

$$R_t = r_t + prOAS + \pi_{x,t} + \pi_{y,t} \quad \text{식(16)}$$

- 여기서  $\pi_{x,t}$ 와  $\pi_{y,t}$ 는 각각 조기상환요인  $x_t$ 와  $y_t$ 에 대한 조기상환위험 프리미엄으로 다음 식(17)-식(18)과 같이 정의할 수 있음

$$\pi_x = \lambda_x \sigma_x \sqrt{x} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \text{식(17)}$$

$$\pi_y = \lambda_y \sigma_y \sqrt{y} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{식(18)}$$

- 여기서  $\lambda_x$ 와  $\lambda_y$ 는 각각 조기상환요인  $x_t$ 와  $y_t$ 에 대한 가격  $V$ 의 민감도로 볼 수 있음
- 식(17)-식(18)을 이용하면, 약간의 계산 이후 식(7)에 나타난 MBS의 가격을 다음 식(19)와 같이 표현할 수 있음
- 유도과정은 부록 참조

$$V(m, T) = P^M(0, T) E^{Q^T \times Q^P} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t prOAS ds} \frac{C_t}{P(t, T)} dt \right] \quad \text{식(19)}$$

- 여기서  $Q^T$ 는  $T$ -선도 측도,  $Q^{pr}$ 은 현실측도를 Radon-Nikodym derivative로 나타낸 측도임

○ 이 때, 각 조기상환요인  $x_t$ 와  $y_t$ 는 각각 다음 식(20)-식(21)과 같이 표현함

$$dx_t = [\alpha_x - (\beta_x + \bar{\lambda}_x \sigma_x)x_t]dt + \sigma_x \sqrt{x_t} dW_x^{Q^{pr}}, \quad \text{식(20)}$$

$$dy_t = [\alpha_y - (\beta_y + \bar{\lambda}_y \sigma_y)y_t]dt + \sigma_y \sqrt{y_t} dW_y^{Q^{pr}}. \quad \text{식(21)}$$

- 여기서,

$$[dZ_x^{Q^{pr}}, dZ_y^{Q^{pr}}]^T = [\lambda_x, \lambda_y]^T dt + [dZ_x, dZ_y]^T \quad \text{식(22)}$$

-  $Q^{pr}$ 은  $T$  시점의 정보집합(Filtration)을  $filt_T$ 로 표기할 때, 다음 식(23)의 Radon-Nikodym derivative  $\frac{dQ^{pr}}{dP^{pr}}|_{filt_T}$ 로 정의되는 확률 측도

$$\frac{dQ^{pr}}{dP^{pr}}|_{filt_T} = \exp\left\{-\int_0^T \lambda_x dZ_x^{P^{pr}} - \int_0^T \lambda_y dZ_y^{P^{pr}} - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_x^2 + \lambda_y^2 ds\right\} \quad \text{식(23)}$$

- 따라서 식(14)-식(15)의  $x_t, y_t$ 의 drift가  $Q^{pr}$  측도 하에서도 같은 형태를 가질 수 있도록  $[\lambda_x, \lambda_y]^T = [\bar{\lambda}_x \sqrt{x}, \bar{\lambda}_y \sqrt{y}]^T$ 를 가정

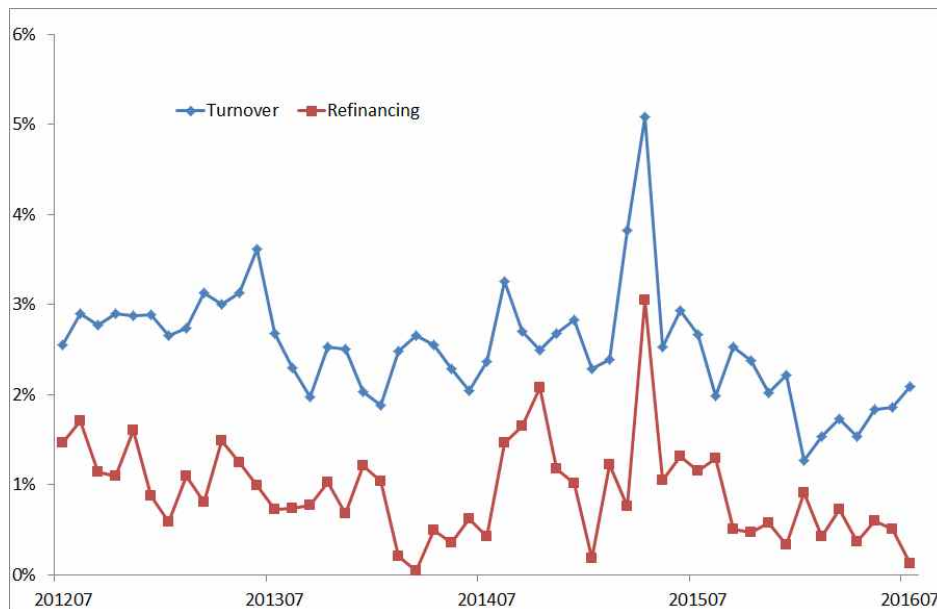
## 4. 확장모형 수치 계산 가능성 및 전망

### 가. 모수 설정

- 확장모형은 기초모형에 비해 상대적으로 많은 모수를 요구하고 있음
  - 크게 금리 모형 관련 모수와 조기상환율 관련 모수, 그리고 OAS 관련 모수로 나누어 생각할 수 있음
  - 이 가운데 금리관련 모수의 경우 MBS 시장과 관계없이 독립적인 금리 시장에서 모수를 추출 가능
- 그러나 조기상환율 관련 모수는 조기상환위험에 따른 MBS 시장 가격 변동을 관찰해야 하므로, 현재 추출하는 것은 불가능한 상태
  - 특별히 회전요인  $x_t$ 와 대환요인  $y_t$ 로 구분하여 모형할 경우 이들의 시계열 데이터가 필요한데, 현재 국내 MBS의 유통 상황에서 이들 시계열을 관찰하기는 어려워 보임
    - Chernov et al.(2016)에서는  $x_t$ 를 표본 기간 동안의 각 월별 데이터에서 할인되어 거래되는, 즉 100보다 낮은 가격으로 거래된 MBS 기초자산 조기상환율의 산술 평균으로 산출
    - $y_t$ 는 관측된 MBS의 조기상환 요율을 대환 인센티브(Refinancing Incentive)요인으로 회귀분석을 통해 산출
- 다만 공사의 MBS 스왑의 경우 기초자산이 대부분 변동금리대출이라는 점을 이용하여 대환요인과 회전요인의 대용치를 추출할 수 있는 가능성이 있음
  - MBS 스왑의 기초자산이 변동금리라면, 이 기초자산의 조기상환율에는 대환요인이 거의 없다고 가정할 수 있음

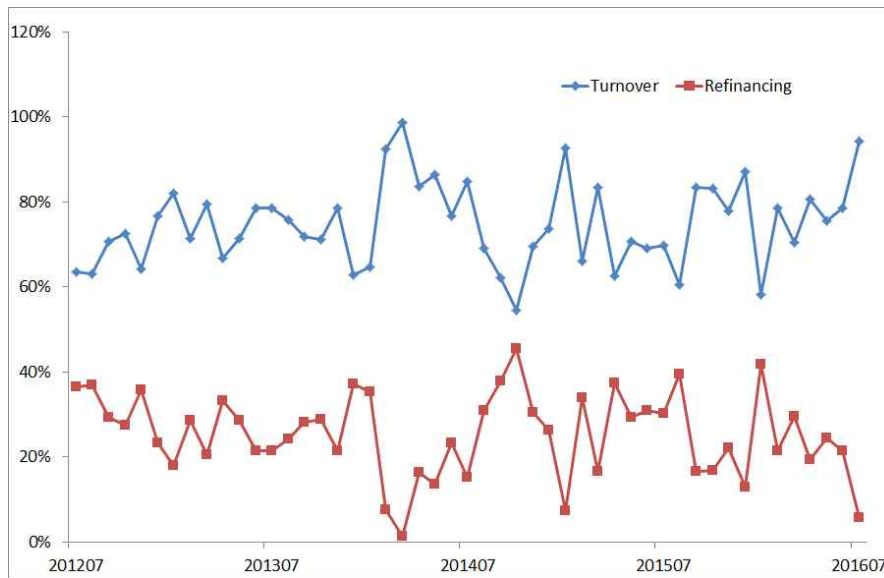
- 다만 MBS 스왑의 발행은 그 횟수가 적고, 발행 시기 또한 매우 유동적이어서 안정적인 시계열을 확보하기 어렵다는 단점이 있음
- 대신 다음과 같이 MBS 스왑 가운데 5개의 풀을 선정하고, 거의 동일한 시기에 발행된 MBS 5개의 풀을 선정하여, 이들 그룹의 월말잔액가중 월평균 조기상환율을 시계열을 구하여 비교할 수 있음
  - MBS 스왑: 2009-1, 2009-5, 2009-7, 2009-8, 2009-9의 5개의 풀
  - MBS: 2009-2, 2009-3, 2009-4, 2009-6, 2009-10의 5개 풀
- MBS 스왑 풀의 평균 조기상환율을 회전유인으로, 또한 일반 MBS 풀의 평균 조기상환율을 대환유인과 회전유인이 더해진 전체 조기상환유인으로 가정하면 다음 [그림15]와 같은 시계열을 얻을 수 있음

[그림15] 대환요인과 회전요인 시계열



- 또한 전체 조기상환에서 각각의 두 요인이 차지하는 비중은 다음 [그림 16]과 같이 나타남

[그림16] 대환요인과 회전요인의 비중 시계열



□ prOAS의 경우 역시 MBS 시장거래 데이터가 필요하나, 국내 MBS 유통 상황 상 시장거래 데이터를 이용하기는 어려움

- Levin and Davidson (2005) 역시 시장거래 데이터에서 모수 추출
- 대신 공사 신용도가 AAA인 점을 착안하여 국채 수익률과 AAA등급 공사채 수익률, 그리고 공사 MBS 수익률을 이용하여 prOAS의 대용치를 다음 식(24)와 같이 산출할 수 있음

$$\begin{aligned}
 r_{MBS} &= r_{KTB} + OAS \\
 &= r_{KTB} + prOAS + \overline{OAS}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

- 여기서  $r_{MBS}$ 는 MBS 수익률,  $r_{KTB}$ 는 국고채 수익률,  $\overline{OAS}$ 는 MBS의 전체 OAS 가운데 조기상환만을 반영한 스프레드

- 앞서 [표1]에서 제시한 바와 같이 공사 MBS의 트랜치별 평균만기 기준으로 스프레드를 구하면 다음 [표4]와 같이 나타남

[표4] OAS와 prOAS 예시

| 법정<br>만기 | 평균<br>만기 | MBS<br>수익률 | 평균만기<br>국고채 수익률 | 평균만기<br>공사채 수익률 | 평균만기<br><i>prOAS</i> | 평균만기<br>$\overline{OAS}$ |
|----------|----------|------------|-----------------|-----------------|----------------------|--------------------------|
| 5년       | 4.28년    | 1.843%     | 1.352%          | 1.473%          | 12.1bp               | 37.0bp                   |
| 7년       | 5.91년    | 1.863%     | 1.376%          | 1.501%          | 12.5bp               | 36.2bp                   |
| 10년      | 8.14년    | 1.814%     | 1.456%          | 1.541%          | 8.5bp                | 27.3bp                   |
| 15년      | 11.1년    | 1.844%     | 1.504%          | 1.575%          | 7.1bp                | 26.9bp                   |
| 20년      | 14.55년   | 1.834%     | 1.512%          | 1.575%          | 6.3bp                | 25.9bp                   |

※ 자료 : 금융투자협회 채권정보센터

- 이 연구는 공사가 발행 검토 중인 Pass-Through MBS의 가격평가에 OAS를 이용한 평가 방식의 적용 가능성을 검토하는 조사연구
  - Pass-Through MBS는 기초자산인 주택담보대출 풀에서 발생하는 현금흐름을 중개기관을 거쳐 투자자에게 바로 지급하는 상품
  - 현재 공사의 CMO방식 MBS는 공사의 최적 의사결정이 포함되어 Pass-Through MBS에 비해 가치 평가에 어려움이 있음

## 1. 분석결과 종합 및 시사점

- 공사 Pass-Through MBS의 기초모형은 현재 Pass-Through MBS의 거래 데이터가 없는 상황에서 사용 가능한 모형을 적용하기로 함
  - 조기상환율에 PSK 모형을 적용하여 MBS 발행 당시 기결정적 (Deterministic)인 형태로 모형
  - OAS는 금리수준과 만기에 관계없이 상수로 적용
  - MBS 발행 당시의 시장 할인율 곡선을 산출하여 적용
  - Pass-Through MBS 가격평가 기초모형을 통해 MBS 가격 결정에 대한 이해도를 높이고 시장에 벤치마크 가격을 제시함
- 또한 확장모형을 준비하여 향후 데이터가 축적되면 보다 엄밀하게 평가할 수 있도록 예비함
  - 금리의 경우 시장 데이터가 충분하나, 조기상환 프리미엄을 적용하기 위한 MBS 거래 데이터는 부족함

- 금리 모형으로 확장 Vasicek 모형 사용
- 조기상환모형은 Chernov et al. (2016)의 접근법에 따라 대환요인과 회전요인을 구분
- 기존 OAS에서 조기상환위험 프리미엄을 분리할 수 있는 prOAS 모형 사용
- 향후 데이터 축적 시 모형 적용 및 업데이트 가능

## 2. 향후 연구과제

- 이 연구는 Pass-Through MBS의 가격평가를 위한 연구로, 다음과 같이 모형 업데이트 및 확장이 가능함
  - 단일 트렌치의 Pass-Through MBS아닌 복수 트렌치의 가격평가 방법 연구
  - Pass-Through MBS 발행 시 기초자산 규모 대비 할증, 할인 발행에 따른 MBS 가격 변동 연구
  - CMO 방식 MBS 가격평가에 대한 이 연구의 가격평가 방식의 적용 가능성 검토

## 참 고 문 헌

1. 김계홍, 2013, 조기상환율 요인분해 및 PSK, *주택금융월보* 2013-11, 한국주택금융공사
2. 안세륜, 노태민, 2016, 축약형 조기상환예측모형 조사연구, *이슈리포트* 16-1호, 한국주택금융공사
3. 한영하, 2013, 한국주택금융공사 보금자리론 조기상환율 추정 및 가치산정 연구, 박사학위논문, 연세대학교
4. Carlin, B.I., F.A. Longstaff, and K. Matoba, 2014, Disagreement and Asset Prices, *Journal of Financial Economics*, Vol.114(2), pp.226-238
5. Chernov, M., B.R. Dunn, and F.A. Longstaff, 2016. Macroeconomic-Driven Prepayment Risk and the Valuation of Mortgage-Backed Securities, National Bureau of Economic Research
6. Deng, Y., J.M. Quigley, and R. Van Order, 2000, Mortgage Terminations, Heterogeneity and the Exercise of Mortgage Options, *Econometrica*, Vol.68, pp.275-307
7. Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981a, A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities, *The Journal of Finance*, Vol.36, pp.471-483
8. Dunn, K.B. and J.J. McConnell, 1981b, Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities, *The Journal of finance*, Vol.36, pp.599-616
9. Fabozzi, F.J., 2016, The Handbook of Mortgage-Backed Securities, Oxford University Press

10. Kau, J.B., 1995, An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages, *Journal of Housing Research*, Vol.6, pp.217-244
11. Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller, III and J.F. Epperson, 1992, A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages, *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol.24, pp.279-299
12. Kau, J.B., D.C. Keenan, and A.A. Smurov, 2004, Reduced-Form Mortgage Valuation, University of Georgia, Georgia
13. Kolbe, A., and R. Zagst, 2008, A Hybrid-Form Model for the Prepayment-Risk-Neutral Valuation of Mortgage-Backed Securities, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol.11, pp.635-656
14. Levin, A. and A. Davidson, 2005, Prepayment Risk- and Option-Adjusted Valuation of MBS, *Journal of Portfolio Management*, Vol.31, pp.73
15. Levin, A. and A. Davidson, 2008, The Concept of Credit OAS in Valuation of MBS, *Journal of Portfolio Management*, Vol.34, pp.41
16. Richard, S.F. and R. Roll, 1989, Prepayment on Fixed-Rate Mortgage-Backed Securities, *Journal of Portfolio Management*, Vol.15, pp.73-82
17. Schwartz E.S. and W.N. Torous, 1989, Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities, *The Journal of Finance*, Vol.44, pp. 375-392

18. Smith, A. and T. Wilson, Fitting Yield Curves with Long Term Constraints, Technical report, 2001
19. Stanton, R., 1995, Rational Prepayment and the Value of Mortgage-Backed Securities, *Review of Financial Studies*, Vol.8, pp.677-708

## 부 록

### □ 식(12) 유도과정

- 식(11)의 정의에 따라  $r_t$ 는 다음 식(25)와 같이 나타낼 수 있음

$$r_t = z_t + \alpha_t \quad \text{식(25)}$$

- 여기서,

$$\alpha_t = f^M(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \quad \text{식(26)}$$

- 이 때,  $t$ 시점에서 만기  $T$ 를 가지는 무이표채의 가격  $P(t, T)$ 는 다음 식(27)과 같이 계산됨

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t} \quad \text{식(27)}$$

- 여기서,

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left\{ B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2a_r t}) B(t, T)^2 \right\}, \\ B(t, T) &= \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r (T-t)}) \end{aligned} \quad \text{식(28)}$$

- 위험중립  $T$ -선도 측도  $Q^T$ 에서 브라운운동  $W^T$ 는 다음 식(29)를 만족함

$$dW_t^T = dW_t + \sigma_r B(t, T) dt \quad \text{식(29)}$$

- 식(29)를 이용하면,  $z_t$ 는 다음 식(30)과 같은 확률미분방정식을 만족함

$$dz_t = [-B(t, T)\sigma^2 - a_r z_t] dt + \sigma_r dW_t^T \quad \text{식(30)}$$

- 식(30)을 적분하면 식(12)를 구할 수 있음

□ 식(19) 유도과정

- 확장모형에서 식(7)은 다음 식(31)과 같이 위험중립측도  $Q$ 와 조기상환 위험에 대한 현실측도  $P^{pr}$ 의 곱측도(Product Measure) 하에서의 기댓값으로 나타남

$$V(m, T) = E^{Q \times P^{pr}} \left[ \int_0^T \exp\{-(r_t + OAS)t\} C_t dt \right] \quad \text{식(31)}$$

- 식(31)에 식(16)-식(18)을 대입하고, Feynman-Kac 공식을 적용하면,  $V(r_0, x_0, y_0; m, T)$ 에 대한 다음 식(32)와 같은 편미분방정식을 얻을 수 있음

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + q_i(c + Ip) \\ & + (\alpha_x - \beta_x x) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\alpha_y - \beta_y y) \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ & - \left( r + pr OAS + \lambda_x \sigma_x \sqrt{x} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda_y \sigma_y \sqrt{y} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial y} + p \right) V \end{aligned} \quad \text{식(32)}$$

- 식(32)를  $\frac{\partial V}{\partial x}$  및  $\frac{\partial V}{\partial y}$ 으로 정리하고, 다음 식(33)-식(34)와 같이  $x_t$ 와  $y_t$ 를 정의하면, 식(23)의 측도  $Q^{pr}$  하에서 식(19)를 얻게 됨

$$dx_t = (\alpha_x - \beta_x x_t - \lambda_x \sigma_x \sqrt{x}) dt + \sigma_x \sqrt{x} dZ_x^{Q^{pr}} \quad \text{식(33)}$$

$$dy_t = (\alpha_y - \beta_y y_t - \lambda_y \sigma_y \sqrt{y}) dt + \sigma_y \sqrt{y} dZ_y^{Q^{pr}} \quad \text{식(34)}$$